إشارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ MEBARKI2016

لدراسة إشارة $ae^{2x}+be^{x}+c$: نتبع طريقة مبسطة (مستنتجة من طرف الأستاذ مباركي)

1) نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $ae^{2x}+be^{x}+c=at^{2}+bt+c$ ، بما أن $t=e^{x}$ فإن $t\succ 0$.

2) نقوم بحساب Δ : $\Delta=b^{2}-4ac$

3) نستنتج إشارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ حسب Δ ونلخص ذلك في الجدول الآتي :

إذا كان Δ	فإن العبارة $at^{2}+bt+c$			جدول إشارة $ae^{2x}+be^{x}+c$
سالب تماما	لا تقبل جذورا حقيقة			x: $-\infty$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: إشارة a
معدوم	تقبل حلا مضاعفا $t=\frac{-b}{2a}$	إذا كان	$t\leq 0$	x: $-\infty$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: إشارة a
			$t\succ 0$	x: $-\infty$ … $\ln t$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: إشارة a … 0 … إشارة a
موجب تماما	تقبل حلين متمايزين $t_{1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $t_{2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (نفرض $t_{1}\prec t_{2}$)		$t_{1}\leq 0$ و $t_{2}\leq 0$	x: $-\infty$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: إشارة a
			$t_{1}\succ 0$ و $t_{2}\succ 0$	x: $-\infty$ … $\ln t_{1}$ … $\ln t_{2}$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: إشارة a … 0 … عكس إشارة a … 0 … إشارة a
			$t_{1}\succ 0$ و $t_{2}\leq 0$	x: $-\infty$ … $\ln t_{1}$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: عكس إشارة a … 0 … إشارة a
			$t_{1}\leq 0$ و $t_{2}\succ 0$	x: $-\infty$ … $\ln t_{2}$ … $+\infty$ $ae^{2x}+be^{x}+c$: عكس إشارة a … 0 … إشارة a

أمثلة : (بنفس ترتيب حالات الجدول)

أ) **في حالة Δ سالب تماما :**

a) **دراسة إشارة :** $5e^{2x}-3e^{x}+1$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $5e^{2x}-3e^{x}+1=5t^{2}-3t+1$

حساب Δ : $\Delta=(-3)^{2}-4(5)(1)=9-20=-11\prec 0$

نجد Δ سالب تماما و بما أن $a=5$ عدد موجب تماما فإن :

x	$-\infty$ $+\infty$
$5e^{2x}-3e^{x}+1$	+

b) دراسة إشارة : $-3e^{2x}+2e^{x}-4$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $-3e^{2x}+2e^{x}-4=-3t^{2}+2t-4$

حساب Δ : $\Delta=(2)^{2}-4(-3)(-4)=4-48=-44\prec 0$

نجد Δ سالب تماما و بما أن $a=-3$ عدد سالب تماما فإن :

x	$-\infty$ $+\infty$
$-3e^{2x}+2e^{x}-4$	-

ب) في حالة Δ معدوم :

a) **دراسة إشارة :** $-2e^{2x}-12e^{x}-18$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $-2e^{2x}-12e^{x}-18=-2t^{2}-12t-18$

حساب Δ : $\Delta=(-12)^{2}-4(-2)(-18)=144-144=0$

نجد Δ معدوم ومنه العبارة تقبل حلا مضاعفا : $t=\dfrac{-(-12)}{2\times(-2)}=-3\leq 0$

و بما أن $a=-3$ عدد سالب تماما فإن :

x	$-\infty$ $+\infty$
$-2e^{2x}-12e^{x}-18$	-

b) **دراسة إشارة :** $2e^{2x}+16e^{x}+32$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $2e^{2x}+16e^{x}+32=2t^{2}+16t+32$

حساب Δ : $\Delta=(16)^{2}-4(2)(32)=256-256=0$

نجد Δ معدوم ومنه العبارة تقبل حلا مضاعفا : $t=\dfrac{-(16)}{2\times(2)}=-4\leq 0$

و بما أن $a=2$ عدد موجب تماما فإن :

x	$-\infty$ $+\infty$
$2e^{2x}+16e^{x}+32$	+

c) **دراسة إشارة :** $e^{2x}-4e^{x}+4$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $e^{2x}-4e^{x}+4=t^{2}-4t+4$

حساب Δ : $\Delta=(-4)^{2}-4(1)(4)=16-16=0$

نجد Δ معدوم ومنه العبارة تقبل حلا مضاعفا : $t=\dfrac{-(-4)}{2\times 1}=2\succ 0$ ($\ln t=\ln 2$)

و بما أن $a=5$ عدد موجب تماما فإن :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^{2x}-4e^{x}+4$		+	0	+	

d) **دراسة إشارة :** $-e^{2x}+6e^{x}-9$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $-e^{2x}+6e^{x}-9=-t^{2}+6t-9$

حساب Δ : $\Delta=(6)^{2}-4(-1)(-9)=36-36=0$

نجد Δ معدوم ومنه العبارة تقبل حلا مضاعفا : $t=\dfrac{-(6)}{2\times(-1)}=3\succ 0$ ($\ln t=\ln 3$)

و بما أن $a=-1$ عدد سالب تماما فإن :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$-e^{2x}+6e^{x}-9$		-	0	-	

ج) في حالة Δ موجب تماما:

a) **دراسة إشارة :** $e^{2x}+5e^{x}+6$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $e^{2x}+5e^{x}+6=t^{2}+5t+6$

حساب Δ : $\Delta=(5)^{2}-4(1)(6)=25-24=1\succ 0$

نجد Δ موجب تماما ومنه العبارة تقبل حلين متمايزين :

$t_{1}=\dfrac{-5-\sqrt{1}}{2(1)}=\dfrac{-5-1}{2}=-3\leq 0$ و $t_{2}=\dfrac{-5+\sqrt{1}}{2(1)}=\dfrac{-5+1}{2}=-2\leq 0$

بما أن الحلان سالبان و $a=1$ عدد موجب تماما فإن :

x	$-\infty$ $+\infty$
$e^{2x}+5e^{x}+6$	+

b) **دراسة إشارة :** $-2e^{2x}-10e^{x}-8$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $-2e^{2x}-10e^{x}-8=-2t^{2}-10t-8$

حساب Δ : $\Delta=(-10)^{2}-4(-2)(-8)=100-64=36\succ 0$

نجد Δ موجب تماما ومنه العبارة تقبل حلين متمايزين :

$t_1=\dfrac{-(-10)-\sqrt{36}}{2(-2)}=\dfrac{10-6}{-4}=-1\le 0$ و $t_2=\dfrac{-(-10)+\sqrt{36}}{2(-2)}=\dfrac{10+6}{-4}=-4\le 0$

بما أن الحلان سالبان و $a=-2$ عدد سالب تماما فإن :

x	$-\infty$	$+\infty$
$-2e^{2x}-10e^{x}-8$	-	

c) **دراسة إشارة :** $e^{2x}-12e^{x}+35$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $e^{2x}-12e^{x}+35=t^{2}-12t+35$

حساب Δ : $\Delta=(-12)^{2}-4(1)(35)=144-140=4\succ 0$

نجد Δ موجب تماما ومنه العبارة تقبل حلين متمايزين :

$t_1=\dfrac{-(-12)-\sqrt{4}}{2(1)}=\dfrac{12-2}{2}=5\succ 0$ و $t_2=\dfrac{-(-12)+\sqrt{4}}{2(1)}=\dfrac{12+2}{2}=7\succ 0$

بما أن الحلان موجبان و ($\ln t_1=\ln 5$ و $\ln t_2=\ln 7$) و $a=1$ عدد موجب تماما فإن :

x	$-\infty$		$\ln 5$		$\ln 7$		$+\infty$
$e^{2x}-12e^{x}+35$		+	0	-	0	+	

d) **دراسة إشارة :** $-3e^{2x}+12e^{x}-9$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $-3e^{2x}+12e^{x}-9=-3t^{2}+12t-9$

حساب Δ : $\Delta=(12)^{2}-4(-3)(-9)=144-108=36\succ 0$

نجد Δ موجب تماما ومنه العبارة تقبل حلين متمايزين :

$t_1=\dfrac{-(12)-\sqrt{36}}{2(-3)}=\dfrac{-12-6}{-6}=3\succ 0$ و $t_2=\dfrac{-(12)+\sqrt{36}}{2(-3)}=\dfrac{-12+6}{-6}=1\succ 0$

بما أن الحلان موجبان و ($\ln t_1=\ln 3$ و $\ln t_2=\ln 1=0$) و $a=-3$ عدد سالب تماما فإن :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$-3e^{2x}+12e^{x}-9$		-	0	+	0	-	

e) **دراسة إشارة :** $e^{2x}-3e^{x}-10$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $e^{2x}-3e^{x}-10=t^{2}-3t-10$

حساب Δ : $\Delta=(-3)^{2}-4(1)(-10)=9+40=49\succ 0$

نجد Δ موجب تماما ومنه العبارة تقبل حلين متمايزين :

$t_1=\dfrac{-(-3)-\sqrt{49}}{2(1)}=\dfrac{3-7}{2}=-2\le 0$ و $t_2=\dfrac{-(-3)+\sqrt{49}}{2(1)}=\dfrac{3+7}{2}=5\succ 0$

بما أن أحد الحلين موجب تماما و الآخر سالب و ($\ln t_2=\ln 5$) و $a=1$ عدد موجب تماما فإن :

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
$e^{2x}-3e^{x}-10$		-	0	+	

f) **دراسة إشارة :** $-e^{2x}-6e^{x}+7$: نضع : $t=e^{x}$: ومنه : $-e^{2x}-6e^{x}+7=-t^{2}-6t+7$

حساب Δ : $\Delta=(-6)^{2}-4(-1)(7)=36+28=64\succ 0$ نجد Δ موجب تماما ومنه العبارة تقبل حلين متمايزين :

$t_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{64}}{2(-1)}=\dfrac{6-8}{-2}=1\succ 0$ و $t_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{64}}{2(-1)}=\dfrac{6+8}{-2}=-7\le 0$

بما أن أحد الحلين موجب تماما و الآخر سالب و ($\ln t_1=\ln 1=0$) و $a=-1$ عدد سالب تماما فإن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-e^{2x}-6e^{x}+7$		-	0	+	

كيفية دراسة إشارة مركب دالتين إنطلاقا من إشارة الدالة الأولى MEBARKI2016

نفرض أن g دالة عددية إشارتها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-3		25		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

نريد استنتاج إشارة كل من :

$g(e^{x})$ ، $g(\ln x)$ ، $g(\sqrt{x})$ ، $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $g(-x)$ ، $g(2x-3)$ ، $g(5-4x)$ ، $g(x^{2})$ ، $g(-4\ln x+5)$

1) دراسة إشارة $g(e^{x})$: من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه $g(e^{x})=0$ لما : $e^{x}=25$ أو $e^{x}=-3$

$e^{x}=25$ معناه : $x=\ln 25=2\ln 5$ / $e^{x}=-3$ لا تقبل حلولا حقيقية لأن $e^{x}\succ 0$ ومنه $g(e^{x})=0$ لما $x=2\ln 5$

ب) $g(x)\prec 0$ لما : $x\succ 25$ أو $x\prec -3$ وعليه : $g(e^{x})\prec 0$ لما $e^{x}\succ 25$ أو $e^{x}\prec -3$

$e^{x}\succ 25$ معناه: $x\succ \ln 25$ أي $x\succ 2\ln 5$ / $e^{x}\prec -3$ لا تقبل حلولا حقيقية لأن $e^{x}\succ 0$ ومنه : $g(e^{x})\prec 0$ لما $x\succ 2\ln 5$

جدول إشارة : $g(e^{x})$:

x	$-\infty$		$2\ln 5$		$+\infty$
$g(e^{x})$		+	0	-	

2) دراسة إشارة: $g(\ln x)$: (نعلم أن $\ln x$ معرفة لما $x\in]0,+\infty[$) من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه : $g(\ln x)=0$ لما : $\ln x=25$ أو $\ln x=-3$

$\ln x=25$ معناه : $x=e^{25}$ / $\ln x=-3$ معناه : $x=e^{-3}$ ومنه $g(e^{x})=0$ لما $x=e^{25}$ أو $x=e^{-3}$

ب) $g(x)\succ 0$ لما : $-3\prec x\prec 25$

و عليه : $g(\ln x)\succ 0$ لما $-3\prec \ln x\prec 25$ أي $e^{-3}\prec x\prec e^{25}$ ومنه : $g(\ln x)\succ 0$ لما $e^{-3}\prec x\prec e^{25}$

جدول إشارة : $g(\ln x)$:

x	0		e^{-3}		e^{25}		$+\infty$
$g(\ln x)$	‖	-	0	+	0	-	

3) دراسة إشارة: $g(\sqrt{x})$: (نعلم أن $\sqrt{x}$ معرفة لما $x\in [0,+\infty[$) من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$

وعليه : $g(\sqrt{x})=0$ لما : $\sqrt{x}=25$ أو $\sqrt{x}=-3$ (ليس لها حلولا حقيقية لأن $\sqrt{x}\geq 0$ و $-3\prec 0$)

$\sqrt{x}=25$ معناه : $x=625$ (بتربيع الطرفين) ومنه $g(\sqrt{x})=0$ لما $x=625$

ب) $g(x)\prec 0$ لما : $x\succ 25$ أو $x\prec -3$ وعليه : $g(\sqrt{x})\prec 0$ لما $\sqrt{x}\succ 25$ أو $\sqrt{x}\prec -3$

$\sqrt{x}\succ 25$ معناه : $x\succ 625$ (بتربيع الطرفين)/ $\sqrt{x}\prec -3$ لا تقبل حلولا حقيقية لأن $\sqrt{x}\geq 0$.

ومنه : $g(\sqrt{x})\prec 0$ لما $x\succ 625$

جدول إشارة : $g(\sqrt{x})$:

x	0		625		$+\infty$
$g(\sqrt{x})$		+	0	-	



4) دراسة إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ **:** (نعلم أن $\frac{1}{x}$ معرفة لما $x\neq 0$) من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج:

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه : $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ لما : $\frac{1}{x}=25$ أو $\frac{1}{x}=-3$

$\frac{1}{x}=25$ معناه : $x=\frac{1}{25}$ / $\frac{1}{x}=-3$ معناه $x=-\frac{1}{3}$ ومنه $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ لما $x=\frac{1}{25}$ أو $x=-\frac{1}{3}$

ب) $g(x)\prec 0$ لما : $x\succ 25$ أو $x\prec -3$ وعليه : $g\left(\frac{1}{x}\right)\prec 0$ لما $\frac{1}{x}\succ 25$ أو $\frac{1}{x}\prec -3$.

$\frac{1}{x}\succ 25$ معناه : $x\prec\frac{1}{25}$ / $\frac{1}{x}\prec -3$ معناه : $x\succ -\frac{1}{3}$ ومنه : $g\left(\frac{1}{x}\right)\prec 0$ لما $x\prec\frac{1}{25}$ أو $x\succ -\frac{1}{3}$.

جدول إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ **:**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{25}$		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0	-	‖	-	0	+	

5) دراسة إشارة $g(-x)$ **:** من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه : $g(-x)=0$ لما : $-x=25$ أو $-x=-3$

$-x=25$ معناه : $x=-25$ / $-x=-3$ معناه : $x=3$ ومنه $g(-x)=0$ لما $x=-25$ أو $x=3$

ب) $g(x)\succ 0$ لما : $-3\prec x\prec 25$

وعليه : $g(-x)\succ 0$ لما $-3\prec -x\prec 25$ أي $-25\prec x\prec 3$ ومنه : $g(-x)\succ 0$ لما $-25\prec x\prec 3$

جدول إشارة $g(-x)$ **:**

x	$-\infty$		-25		3		$+\infty$
$g(-x)$		-	0	+	0	-	

6) دراسة إشارة $g(2x-3)$ **:** من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه : $g(2x-3)=0$ لما : $2x-3=25$ أو $2x-3=-3$

$2x-3=25$ معناه : $2x=28$ أي $x=14$ / $2x-3=-3$ معناه : $2x=0$ أي $x=0$

ومنه $g(2x-3)=0$ لما $x=14$ أو $x=0$

ب) $g(x)\succ 0$ لما : $-3\prec x\prec 25$

وعليه : $g(2x-3)\succ 0$ لما $-3\prec 2x-3\prec 25$ أي $0\prec 2x\prec 28$ أي $0\prec x\prec 14$ ومنه : $g(2x-3)\succ 0$ لما $0\prec x\prec 14$

جدول إشارة $g(2x-3)$ **:**

x	$-\infty$		0		14		$+\infty$
$g(2x-3)$		-	0	+	0	-	

7) دراسة إشارة $g(5-4x)$: من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه : $g(5-4x)=0$ لما : $5-4x=25$ أو $5-4x=-3$

$5-4x=25$ معناه : $-4x=20$ أي $x=-5$ / $5-4x=-3$ معناه : $-4x=-8$ أي $x=2$

ومنه $g(5-4x)=0$ لما $x=-5$ أو $x=2$

ب) $g(x)\succ 0$ لما : $-3\prec x\prec 25$ وعليه : $g(5-4x)\succ 0$ لما $-3\prec 5-4x\prec 25$ أي $-8\prec -4x\prec 20$ أي $-5\prec x\prec 2$

ومنه : $g(5-4x)\succ 0$ لما $-5\prec x\prec 2$

جدول إشارة : $g(5-4x)$:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$g(5-4x)$		-	0	+	0	-	

8) دراسة إشارة $g(x^2)$: من خلال جدول إشارة $g(x)$ نستنتج :

أ) $g(x)=0$ لما : $x=25$ أو $x=-3$ وعليه : $g(x^2)=0$ لما : $x^2=25$ أو $x^2=-3$

$x^2=25$ معناه : $x=\sqrt{25}=5$ أو $x=-\sqrt{25}=-5$ / $x^2=-3$ لا تقبل حلولا حقيقية لأن $x^2\geq 0$

ومنه $g(x^2)=0$ لما $x=5$ أو $x=-5$

ب) $g(x)\prec 0$ لما : $x\succ 25$ أو $x\prec -3$ وعليه : $g(x^2)\prec 0$ لما $x^2\succ 25$ أو $x^2\prec -3$

$x^2\prec -3$ لا تقبل حلولا حقيقية لأن $x^2\geq 0$.

$x^2\succ 25$ معناه: $x^2-25\succ 0$ أي $(x-5)(x+5)\succ 0$ ومنه: $x\in]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$

ومنه : $g(x^2)\prec 0$ لما $x\in]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$

جدول إشارة : $g(x^2)$:

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$g(x^2)$		+	0	-	0	+	

9) أدرس إشارة $g(-4\ln x+5)$:

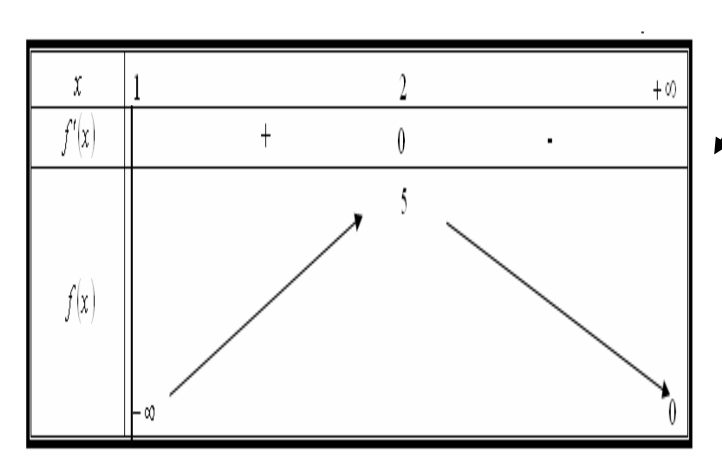
النتيجة :

x	0		e^{-5}		e^{2}		$+\infty$
$g(-4\ln x+5)$	‖	-	0	+	0	-	

كيفية إستنتاج تغيرات مركب دالتين إنطلاقا من تغيرات إحداهما MEBARKI2016

مثال 01 :

نفرض أن f دالة عددية جدول تغيراتها الآتي :



x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	0

نريد دراسة تغيرات الدالتين دون إيجاد عبارتيهما:

h (المعرفة على $]1;+\infty[$) و g (المعرفة على $]0;+\infty[$)

حيث : $h(x)=e^{f(x)}$ و $g(x)=f(e^{x})$

(استنتاجا من جدول تغيرات الدالة f):

1) دراسة تغيرات الدالة h :

النهايات :

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} h(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} e^{f(x)}=e^{-\infty}=0$ (لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)}=e^{0}=1$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$)

الدالة المشتقة $h'(x)$: $h'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'=f'(x)\times e^{f(x)}$

إشارة الدالة المشتقة : نعلم أن $e^{f(x)}\succ 0$ و عليه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ (إشارتها موجودة في جدول التغيرات)

جدول تغيرات الدالة h :

لدينا : $h(2)=e^{f(2)}=e^{5}$ (لأن $f(2)=5$)

x	1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	e^{5}	↘	1

2) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(e^{x})=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$

(نعوض 0 في e^{x} نجد 1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(e^{x})=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(نعوض $+\infty$ في e^{x} نجد $+\infty$)

الدالة المشتقة $g'(x)$ و إشارتها: $g'(x)=\left[f(e^{x})\right]'=(e^{x})'\times f'(e^{x})=e^{x}\times f'(e^{x})$

نعلم أن $e^{x}\succ 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f'(e^{x})$ (نستنتج إشارتها انطلاقا من إشارة $f'(x)$ من جدول تغيرات f)

من خلال جدول تغيرات الدالة f نجد : $f'(x)=0$ لما : $x=2$ و عليه $f'(e^{x})=0$ لما $e^{x}=2$ أي $x=\ln 2$

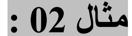
$f'(x)\succ 0$ لما $1\prec x\prec 2$ وعليه $f'(e^{x})\succ 0$ لما : $e^{x}\prec 2$

جدول تغيرات الدالة g :

$g(\ln 2)=f(e^{\ln 2})=f(2)=5$

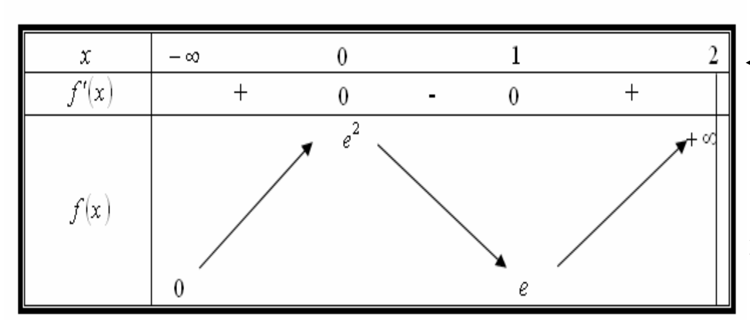
(انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f)

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	0



مثال 02 :

نفرض أن f دالة عددية جدول تغيراتها الآتي :



x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	e^2	↘	e	↗	$+\infty$

نريد دراسة تغيرات الدالتين :

h (المعرفة على $]-\infty;2[$) و g (المعرفة على $]0;1[$)

حيث : $h(x)=\ln f(x)$ و $g(x)=f(\ln x)$

دون إيجاد عبارتها (استنتاجا من جدول تغيرات الدالة f) :

1) دراسة تغيرات الدالة h :

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln f(x)=\ln 0=-\infty \quad \text{(لأن } \lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \text{)}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} h(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\ln f(x)=\ln(+\infty)=+\infty \quad \text{(لأن } \lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=+\infty \text{)}$$

الدالة المشتقة $h'(x)$: $h'(x)=[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

إشارة الدالة المشتقة :

من خلال جدول التغيرات نلاحظ أن $f(x)\succ 0$ وعليه إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x)$ (إشارتها موجودة في جدول التغيرات)

جدول تغيرات الدالة h :

لدينا : $h(0)=\ln f(0)=\ln e^2=2$

$h(1)=\ln f(1)=\ln e=1$

x	$-\infty$		0		1		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

2) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(\ln x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

(نعوض 0 في $\ln x$ نجد $-\infty$)

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1} f(\ln x)=\lim_{x\to0} f(x)=e^2$$

(نعوض 1 في $\ln x$ نجد 0)

الدالة المشتقة $g'(x)$ و إشارتها : $g'(x)=[f(\ln x)]'=(\ln x)'\times f'(\ln x)=\dfrac{1}{x}\times f'(\ln x)$

نعلم أن مجموعة تعريف الدالة g هي $]0;1[$ معناه أن $x\succ 0$ إذن $\dfrac{1}{x}\succ 0$ وعليه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f'(\ln x)$

من خلال جدول تغيرات الدالة f نجد : $f'(x)=0$ لما $x=0$ أو $x=1$

وعليه : $f'(\ln x)=0$ لما : $\ln x=0$ أي $x=e^0=1$ أو $\ln x=1$ أي $x=e^1=e$

$f'(x)\prec 0$ لما : $0\prec x\prec 1$ وعليه $f'(\ln x)\prec 0$ لما : $0\prec \ln x\prec 1$ أي $e^0\prec x\prec e^1$ و عليه $1\prec x\prec e$

نستنتج جدول إشارة $f'(\ln x)$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(\ln x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة g :

(نأخذ إشارة $f'(\ln x)$ على المجال $]0;1[$)

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	e^2

مثال 03: نفرض أن f دالة عددية جدول تغيراتها المعطى في المثال الثاني .

نريد استنتاج تغيرات الدوال الآتية h ، g ، u ، v ، k ، q حيث :

h دالة معرفة على $]-\infty;2[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ ، g دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـ : $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

u دالة معرفة على $]-\infty;2[$ بـ : $u(x)=[f(x)]^2$ ، v دالة معرفة على $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ بـ : $v(x)=f(x^2)$

k دالة معرفة على $]\frac{1}{2};+\infty[$ بـ : $k(x)=f(-2x+3)$ ، q دالة معرفة على $]-\infty;2[$ بـ : $q(x)=-2f(x)+3$

1) دراسة تغيرات الدالة h :

النهايات : $\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0^+$) **(لأن f تتزايد من 0)**

$\lim_{x\overset{<}{\to}2} h(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$ (لأن $\lim_{x\overset{<}{\to}2} f(x)=+\infty$)

الدالة المشتقة $h'(x)$: $h'(x)=\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

إشارة الدالة المشتقة :

نعلم أن $[f(x)]^2\succ 0$ و عليه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $-f'(x)$ (إشارة $f'(x)$ موجودة في جدول التغيرات)

جدول تغيرات الدالة h :

لدينا :

$h(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$

$h(1)=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{e}=e^{-1}$

x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	$+\infty$ ↘		e^{-2}	↗	e^{-1}	↘	0

2) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

$\lim_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ (نعوض 0 بقيم أقل - أي إشارة x سالبة - (0^-) في $\frac{1}{x}$ نجد $-\infty$)

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=e^2$ (نعوض $-\infty$ في $\frac{1}{x}$ نجد (0^-) أي 0 بقيم أقل)

الدالة المشتقة $g'(x)$ و إشارتها: $g'(x)=\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\left(\frac{1}{x}\right)'\times f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}\times f'\left(\frac{1}{x}\right)$

نعلم أن $x^2\succ 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $-f'\left(\frac{1}{x}\right)$ (نستنتج إشارتها انطلاقا من إشارة $f'(x)$)

من خلال جدول تغيرات الدالة f نجد : $f'(x)=0$ لما : $x=0$ أو $x=1$ وعليه $f'\left(\frac{1}{x}\right)=0$ لما $\frac{1}{x}=0$ أو $\frac{1}{x}=1$

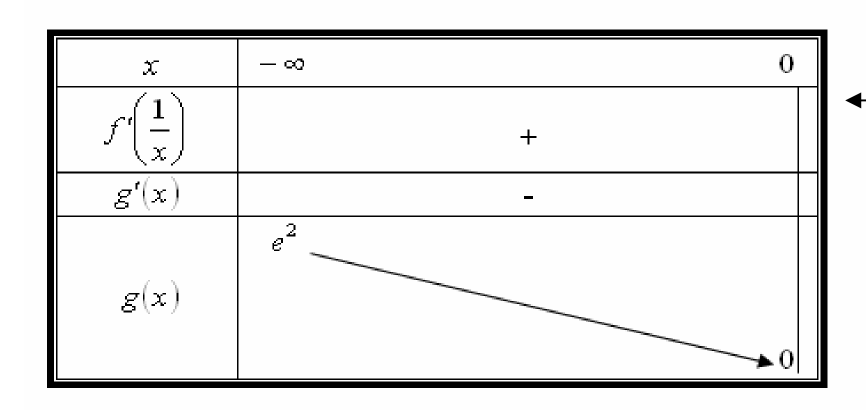
$\frac{1}{x}=0$ ليس لها حل لأن $1\neq 0$ ، $\frac{1}{x}=1$ معناه $x=\frac{1}{1}=1$ ومنه $f'(x)=0$ لما : $x=1$

$f'(x)\prec 0$ لما $0\prec x\prec 1$ وعليه $f'\left(\frac{1}{x}\right)\prec 0$ لما : $0\prec\frac{1}{x}\prec 1$ ومنه $x\succ 1$ (بقلب أطراف المتباينة)

نستنتج جدول إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات الدالة g :



x	$-\infty$		0
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	e^2	↘	0

3) دراسة تغيرات الدالة u:

النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} u(x)=\lim_{x\to-\infty}[f(x)]^2=(0)^2=0$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$)

$\lim_{x\xrightarrow{<}2} u(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}[f(x)]^2=(+\infty)^2=+\infty$ (لأن $\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=+\infty$)

الدالة المشتقة $u'(x)$: $u'(x)=\left[[f(x)]^2\right]'=2\times f'(x)\times f(x)$

إشارة الدالة المشتقة : إشارة $u'(x)$ هي إشارة الجداء $f'(x)\times f(x)$ (إشارة $f(x)$ تستنتج من جدول التغيرات)

جدول تغيرات الدالة u :

لدينا :

$u(0)=[f(0)]^2=(e^2)^2=e^4$

$u(1)=[f(1)]^2=(e)^2=e^2$

x	$-\infty$		0		1		2
$f(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	0	↗	e^4	↘	e^2	↗	$+\infty$

4) دراسة تغيرات الدالة v:

النهايات :

$\lim_{x\to-\sqrt{2}} v(x)=\lim_{x\to-\sqrt{2}} f(x^2)=\lim_{x\to2} f(x)=+\infty$ (نعوض $-\sqrt{2}$ في x^2 نجد 2)

$\lim_{x\to\sqrt{2}} v(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x^2)=\lim_{x\to2} f(x)=+\infty$ (نعوض $\sqrt{2}$ في x^2 نجد 2)

الدالة المشتقة $v'(x)$ و إشارتها : $v'(x)=\left[f(x^2)\right]'=(x^2)'\times f'(x^2)=2x\times f'(x^2)$

ومنه إشارة $v'(x)$ هي إشارة الجداء $2x\times f'(x^2)$ ($2x$ عبارة من الدرجة الأولى و إشارة $f'(x^2)$ تستنتج من إشارة $f'(x)$)

من خلال جدول تغيرات الدالة f نجد : $f'(x)=0$ لما : $x=0$ أو $x=1$ وعليه $f'(x^2)=0$ لما $x^2=0$ أو $x^2=1$

$x^2=0$ معناه $x=0$ ، $x^2=1$ معناه $x=1$ أو $x=-1$ ومنه $f'(x^2)=0$ لما : $x=0$ أو $x=1$ أو $x=-1$

$f'(x)\prec0$ لما $0\prec x\prec1$ وعليه $f'(x^2)\prec0$ لما : $0\prec x^2\prec1$ و هذا معناه $x^2\succ0$ و $x^2\prec1$.

$x^2\succ0$ دائما محققة إلا لما $x=0$ أي $x\in\Re-\{0\}$

$x^2\prec1$ معناه $x^2-1\prec0\Leftarrow(x-1)(x+1)\prec0\Leftarrow x\in]-1;1[$

$x\in\left]-1;0\right[\cup\left]0;1\right[\Leftarrow x\in(\Re-\{0\})\cap\left]-1;1\right[\Leftarrow 0\prec x^2\prec 1$

إذن نستنتج أن $f'(x)\prec 0$ لما : $x\in\left]-1;0\right[\cup\left]0;1\right[$

نستنتج جدول إشارة $f'(x^2)$:

x	$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$
$f'(x^2)$		+	0	-	0	-	0	+	

جدول تغيرات الدالة v :

$v(-1)=f\left[(-1)^2\right]=f(1)=e$

$v(0)=f\left[(0)^2\right]=f(0)=e^2$

$v(1)=f\left[(1)^2\right]=f(1)=e$

x	$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$
$2x$		-		-	0	+		+	
$f'(x^2)$		+	0	-	0	-	0	+	
$v'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$v(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	e^2	↘	e	↗	$+\infty$

يا بني حاول إيجاد جدولي تغيرات كل من الدالتين k و q .

ثم تحقق من صحة جدولي التغيرات التي استنتجهما ***الأستاذ مباركي***

جدول تغيرات الدالة k

x	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(-2x+3)$		+	0	-	0	+	
$k'(x)$		-	0	+	0	-	
$k(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	e^2	↘	0

جدول تغيرات الدالة q :

x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$q'(x)$		-	0	+	0	-	
$q(x)$	3	↘	$3-2e^2$	↗	$3-2e$	↘	0

يتمنى الأستاذ مباركي أن يستفيد التلاميذ المقبلين على شهادة البكالوريا 2016 من هذه المجهودات و أن يزول كل غموض ممكن في مادة الرياضيات .

